# Soluzioni della Seconda Esercitazione di Metodi matematici per l'informatica (Canale A-D)

Francesco Davì

10 ottobre 2008

## Soluzioni degli esercizi

**Soluzione Esercizio *.**

*(a)* $\wp(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{\{2\}\}, \{1, \{2\}\}\}$ *da cui si ottiene che* $A \cap \wp(A) = \emptyset$*, in quanto non esiste alcun elemento che appartiene sia ad* $A$ *che a* $\wp(A)$*;*

*(b)* $\wp(B) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{1\}, \{\emptyset, 1\}\}$ *da cui si ottiene che* $B \cap \wp(B) = \{\emptyset\}$*, in quanto sia* $B$ *che* $\wp(B)$ *contengono l'insieme vuoto;*

*(c)* $\wp(C) = \{\emptyset, \{1\}, \{\{1\}\}, \{1, \{1\}\}\}$ *da cui si ottiene che* $C \cap \wp(C) = \{\{1\}\}$*;*

*(d)* $\wp(D) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ *da cui si ottiene che* $D \cap \wp(D) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = D$*.*

**Soluzione Esercizio 40.** *Per dimostrare che una relazione gode di una proprietà dobbiamo formalizzare la relazione in modo da poter effettuare una dimostrazione rigorosa, mentre per dimostrare che una relazione non gode di una proprietà è sufficiente mostrare un controesempio.*

*(a) Due circonferenze sono concentriche se i loro centri coincidono, quindi se e solo se la distanza tra i loro due centri è uguale a zero. Utilizzando questa formalizzazione, possiamo mostrare che la relazione che accoppia circonferenze del piano concentriche gode delle seguenti proprietà:*

- ***riflessiva****, in quanto il centro di ogni circonferenza è a distanza zero da se stesso;*

- ***simmetrica***, *in quanto se il centro di una circonferenza* `a` *è a distanza zero dal centro di una circonferenza* `b` *allora il centro della circonferenza* `b` *è a distanza zero dal centro della circonferenza* `a`*;*
- ***transitiva***, *in quanto se il centro di una circonferenza* `a` *è a distanza zero dal centro di una circonferenza* `b` *e il centro della circonferenza* `b` *è a distanza zero dal centro di una circonferenza* `c` *allora il centro della circonferenza* `a` *è a distanza zero dal centro della circonferenza* `c`*.*

*Invece, la relazione non gode delle seguenti proprietà:*

- ***antiriflessiva***, *in quanto il centro di ogni circonferenza è a distanza zero da se stesso;*
- ***antisimmetrica***, *in quanto se il centro di una circonferenza* `a` *è a distanza zero dal centro di una circonferenza* `b` *e il centro della circonferenza* `b` *è a distanza zero dal centro della circonferenza* `a` *allora non è necessariamente vero che* `a` *e* `b` *siano la stessa circonferenza (ad esempio, si considerino due circonferenze con lo stesso centro ma raggi diversi).*

*Tale relazione è quindi una relazione di equivalenza, in quanto gode delle proprietà* ***riflessiva***, ***simmetrica*** e ***transitiva***.

(b) *La relazione che accoppia solidi con lo stesso volume gode delle seguenti proprietà:*

- ***riflessiva***, *in quanto ogni solido ha lo stesso volume di se stesso;*
- ***simmetrica***, *in quanto se un solido* `a` *ha lo stesso volume di un solido* `b` *allora il solido* `b` *ha lo stesso volume del solido* `a`*;*
- ***transitiva***, *in quanto se un solido* `a` *ha lo stesso volume di un solido* `b` *e il solido* `b` *ha lo stesso volume di un solido* `c` *allora il solido* `a` *ha lo stesso volume del solido* `c`*.*

*Invece, la relazione non gode delle seguenti proprietà:*

- ***antiriflessiva***, *in quanto ogni solido ha lo stesso volume di se stesso;*

- ***antisimmetrica***, *in quanto se un solido* $\mathfrak{a}$ *ha lo stesso volume di* $\mathfrak{b}$ *e il solido* $\mathfrak{b}$ *ha lo stesso volume del solido* $\mathfrak{a}$ *allora non è necessariamente vero che* $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ *siano lo stesso solido (ad esempio si considerino i parallelepipedi i cui spigoli misurino rispettivamente 4,8,9 e 2,6,24. Tali solidi hanno il volume uguale ma non sono ovviamente lo stesso solido).*

*Tale relazione è quindi una relazione di equivalenza, in quanto gode delle proprietà* ***riflessiva***, ***simmetrica*** e ***transitiva***.

(c) *La relazione di inclusione insiemistica "$\subseteq$" gode delle seguenti proprietà:*

- ***riflessiva***, *in quanto ogni insieme è sottoinsieme (improprio) di se stesso;*
- ***antisimmetrica***, *in quanto dati due insiemi* $A$ *e* $B$ *se* $A \subseteq B$ *e* $B \subseteq A$ *allora* $A = B$;
- ***transitiva***, *in quanto dati tre insiemi* $A, B$ *e* $C$ *se* $A \subseteq B$ *(tutti gli elementi di* $A$ *appartengono anche a* $B$*) e* $B \subseteq C$ *(tutti gli elementi di* $B$ *appartengono anche a* $C$*) allora* $A \subseteq C$ *(tutti gli elementi di* $A$ *appartengono anche a* $C$*).*

*Invece, la relazione non gode delle seguenti proprietà:*

- ***antiriflessiva***, *in quanto ogni insieme è sottoinsieme (improprio) di se stesso;*
- ***simmetrica***, *in quanto dati due insiemi* $A$ *e* $B$ *se* $A \subseteq B$ *allora non è necessariamente vero che* $B \subseteq A$ *(ad esempio,* $A = \{1\}$ *e* $B = \{1, 2\}$*).*

*Tale relazione non è quindi una relazione di equivalenza, in quanto non gode della proprietà* ***simmetrica***.

(d) *Due rette* $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ *con coefficienti angolari rispettivamente* $m_{\mathfrak{a}}$ *e* $m_{\mathfrak{b}}$ *sono parallele se* $m_{\mathfrak{a}} = m_{\mathfrak{b}}$*, in tal caso scriveremo* $\mathfrak{a} \| \mathfrak{b}$. *Utilizzando questa formalizzazione, possiamo mostrare che la relazione ''essere parallelo a'' nel dominio delle rette del piano gode delle seguenti proprietà:*

- ***riflessiva***, *in quanto ogni retta ha lo stesso coefficiente angolare di se stessa* ($m_{\mathfrak{a}} = m_{\mathfrak{a}}$);

- ***simmetrica***, *in quanto date due rette* $\mathtt{a}$ *e* $\mathtt{b}$ *con coefficienti angolari rispettivamente* $m_{\mathtt{a}}$ *e* $m_{\mathtt{b}}$ *se* $\mathtt{a} \| \mathtt{b}$ *(quindi* $m_{\mathtt{a}} = m_{\mathtt{b}}$*) allora ovviamente* $\mathtt{b} \| \mathtt{a}$*, dato che* $m_{\mathtt{b}} = m_{\mathtt{a}}$*;*
- ***transitiva***, *in quanto date tre rette* $\mathtt{a}$, $\mathtt{b}$ *e* $\mathtt{c}$ *con coefficienti angolari rispettivamente* $m_{\mathtt{a}}$, $m_{\mathtt{b}}$ *e* $m_{\mathtt{c}}$ *se* $\mathtt{a} \| \mathtt{b}$ *(quindi* $m_{\mathtt{a}} = m_{\mathtt{b}}$*) e* $\mathtt{b} \| \mathtt{c}$ *(quindi* $m_{\mathtt{b}} = m_{\mathtt{c}}$*) allora* $\mathtt{a} \| \mathtt{c}$*, dato che* $m_{\mathtt{a}} = m_{\mathtt{c}}$*.*

*Invece, la relazione non gode delle seguenti proprietà:*

- ***antiriflessiva***, *in quanto ogni retta ha lo stesso coefficiente angolare di se stessa;*
- ***antisimmetrica***, *in quanto date due rette* $\mathtt{a}$ *e* $\mathtt{b}$ *se* $\mathtt{a} \| \mathtt{b}$ *e* $\mathtt{b} \| \mathtt{a}$ *allora non è necessariamente vero che* $\mathtt{a}$=$\mathtt{b}$ *(ad esempio,* $\mathtt{a}$*:* $y = x$ *e* $\mathtt{b}$*:* $y = x + 2$*).*

*Tale relazione è quindi una relazione di equivalenza, in quanto gode delle proprietà* ***riflessiva***, ***simmetrica*** *e* ***transitiva***.

(e) *Due rette* $\mathtt{a}$ *e* $\mathtt{b}$ *con coefficienti angolari rispettivamente* $m_{\mathtt{a}}$ *e* $m_{\mathtt{b}}$ *sono perpendicolari se* $m_{\mathtt{a}} = \frac{-1}{m_{\mathtt{b}}}$ *(se* $m_{\mathtt{a}}$ *e* $m_{\mathtt{b}}$ *sono l'uno l'antireciproco dell'altro), in tal caso scriveremo* $\mathtt{a} \perp \mathtt{b}$*. Utilizzando questa formalizzazione, possiamo mostrare che la relazione ''essere perpendicolare a'' nel dominio delle rette del piano gode delle seguenti proprietà:*

  - ***antiriflessiva***, *in quanto dato che* $m_{\mathtt{a}}$ *è un numero reale non è possibile che* $m_{\mathtt{a}} = \frac{-1}{m_{\mathtt{a}}}$ *e quindi per ogni retta* $\mathtt{a}$ *vale* $(\mathtt{a}, \mathtt{a}) \notin R$*;*
  - ***simmetrica***, *in quanto date due rette* $\mathtt{a}$ *e* $\mathtt{b}$ *con coefficienti angolari rispettivamente* $m_{\mathtt{a}}$ *e* $m_{\mathtt{b}}$ *se* $m_{\mathtt{a}} = \frac{-1}{m_{\mathtt{b}}}$ *allora* $m_{\mathtt{b}} = \frac{-1}{m_{\mathtt{a}}}$*.*

  *Invece, la relazione non gode delle seguenti proprietà:*

  - ***riflessiva***, *in quanto dato che* $m_{\mathtt{a}} \in \mathbb{R}$ *non è possibile che* $m_{\mathtt{a}} = \frac{-1}{m_{\mathtt{a}}}$*;*
  - ***antisimmetrica***, *in quanto date due rette* $\mathtt{a}$ *e* $\mathtt{b}$ *con coefficienti angolari rispettivamente* $m_{\mathtt{a}}$ *e* $m_{\mathtt{b}}$ *se* $\mathtt{a} \perp \mathtt{b}$ *(quindi* $m_{\mathtt{a}} = \frac{-1}{m_{\mathtt{b}}}$*) e* $\mathtt{b} \perp \mathtt{a}$ *(quindi* $m_{\mathtt{b}} = \frac{-1}{m_{\mathtt{a}}}$*) allora non è necessariamente vero che* $\mathtt{a}$=$\mathtt{b}$ *(ad esempio,* $\mathtt{a}$*:* $y = x$ *e* $\mathtt{b}$*:* $y = -x$*);*
  - ***transitiva***, *in quanto date tre rette* $\mathtt{a}$,$\mathtt{b}$ *e* $\mathtt{c}$ *con coefficienti angolari rispettivamente* $m_{\mathtt{a}}, m_{\mathtt{b}}$ *e* $m_{\mathtt{c}}$ *se* $\mathtt{a} \perp \mathtt{b}$ *(quindi* $m_{\mathtt{a}} = \frac{-1}{m_{\mathtt{b}}}$*) e* $\mathtt{b} \perp \mathtt{c}$

*(quindi $m_b = \frac{-1}{m_c}$) si ottiene che $m_a = \frac{-1}{\frac{-1}{m_c}} = m_c$ e quindi $a \not\mathcal{L} c$ (dato che $m_a \neq \frac{-1}{m_c}$).*

*Tale relazione non è quindi una relazione di equivalenza, in quanto non gode delle proprietà **riflessiva** e **transitiva**.*

(f) *Dati due numeri naturali $a$ e $b$ si dice che $a$ è un divisore di $b$ se $b = k * a$ con $k \in \mathbb{N}$. Utilizzando questa formalizzazione, possiamo mostrare che la relazione ''essere divisore di'' nell'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ gode delle seguenti proprietà:*

- ***riflessiva**, in quanto ogni numero naturale $a$ è un divisore di se stesso, infatti $a = 1 * a$ e $1 \in \mathbb{N}$;*
- ***antisimmetrica**, in quanto dati due numeri naturali $a$ e $b$ se $a$ è un divisore di $b$ (quindi $b = w * a$ con $w \in \mathbb{N}$) e $b$ è un divisore di $a$ (quindi $a = z * b$ con $z \in \mathbb{N}$) allora otteniamo che $b = w * z * b$ da cui segue necessariamente che $w * z = 1$. Siccome sia $w$ che $z$ sono numeri naturali non può essere altrimenti che $w = z = 1$, da cui segue che $b$=$a$;*
- ***transitiva**, in quanto dati tre numeri naturali $a, b$ e $c$ se $a$ è un divisore di $b$ (quindi $b = w * a$ con $w \in \mathbb{N}$) e $b$ è un divisore di $c$ (quindi $c = z * b$ con $z \in \mathbb{N}$) allora otteniamo che $c = (z * w) * a$. Siccome sia $w$ che $z$ sono numeri naturali, anche $z*w$ è un numero naturale e quindi $a$ è un divisore di $c$ (dato che è possibile scrivere $c$ come il prodotto di $a$ per un numero naturale).*

*Invece, la relazione non gode delle seguenti proprietà:*

- ***antiriflessiva**, in quanto ogni in quanto ogni numero naturale $a$ è un divisore di se stesso;*
- ***simmetrica**, in quanto dati due numeri naturali $a$ e $b$ se $a$ è un divisore di $b$ allora non è necessariamente vero che $b$ è un divisore di $a$ (ad esempio, $a$= 2 e $b$= 10).*

*Tale relazione non è quindi una relazione di equivalenza, in quanto non gode della proprietà **simmetrica**.*

**Soluzione Esercizio 43.** *Scriviamo la relazione $R$ in rappresentazione caratteristica:*

$$R = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z},\ (x - y) = k * 5,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

*$R$ è quindi l'insieme di tutte le coppie ordinate di numeri interi tali che la differenza del primo numero con il secondo si può scrivere come il prodotto tra il numero 5 e un numero intero (tale definizione formalizza infatti ''essere divisibile per 5'').*
*Generalmente possono esistere più forme equivalenti per scrivere una relazione in rappresentazione caratteristica, in questo caso, ad esempio, avremmo potuto scrivere anche:*

$$R = \{(x, y) : (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},\ (x - y) = k * 5,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

*oppure*

$$R = \{(x, y) : (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},\ (x - y) \bmod 5 = 0\}.$$

*Per dimostrare che $R$ è una relazione di equivalenza dobbiamo dimostrare che $R$ soddisfa le proprietà **riflessiva**, **simmetrica** e **transitiva**.*
*Proprietà **riflessiva**:*
*Dato un qualsiasi $a \in \mathbb{Z}$ è vero che $(a - a)$ è divisibile per 5, in quanto $(a - a) = 0$ e quindi $(a - a) = 0 * 5$, possiamo cioè scrivere $(a - a)$ come il prodotto del numero 5 e di un numero intero (in questo caso lo zero).*
*Proprietà **simmetrica**:*
*Dati $a$,$b \in \mathbb{Z}$ se $(a, b) \in R$ allora vale $(a - b) = w * 5$ con $w \in \mathbb{Z}$. Quindi $(b - a) = -w * 5$ e siccome $w \in \mathbb{Z}$ anche $-w \in \mathbb{Z}$ da cui segue che $(b, a) \in R$, in quanto è possibile scrivere $(b - a)$ come il prodotto del numero 5 e di un numero intero.*
*Proprietà **transitiva**:*
*Dati $a$,$b$,$c \in \mathbb{Z}$ se $(a, b) \in R$ (quindi $(a - b) = w * 5$ con $w \in \mathbb{Z}$) e $(b, c) \in R$ (quindi $(b - c) = z * 5$ con $z \in \mathbb{Z}$) allora dalla prima equazione otteniamo $b = a - (w * 5)$ e, sostituendo quest'ultima nella seconda equazione, otteniamo $(a - (w * 5) - c) = z * 5$, da cui segue che $(a - c) = (w + z) * 5$. Siccome sia $w$ che $z$ sono numeri interi, anche $w + z$ è un numero intero e quindi $(a, c) \in R$, dato che è possibile scrivere $(a - c)$ come il prodotto del numero 5 e di un numero intero.*