Soluzioni della Quarta Esercitazione di Metodi matematici per l'informatica (Canale A-D)

Francesco Davì

12 novembre 2008

Soluzioni degli esercizi

Soluzione Esercizio 98. *L'esercizio richiede di dimostrare per induzione che*

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$ (dove abbiamo riscritto la somma dei primi n numeri dispari nella forma $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$).
Applichiamo l'induzione su n.
***Caso base**: se $n=1$ otteniamo che la relazione in esame è vera, infatti $\sum_{i=1}^{1}(2i-1)=1=1^2$.*
***Ipotesi induttiva**: Supponiamo che $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2$ è soddisfatta per un qualsiasi valore n.*
***Passo induttivo**: Vogliamo dimostrare che la relazione vale anche per $n+1$, cioè vogliamo dimostrare che vale $\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1)=(n+1)^2$.*
Analizziamo quindi $\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1)$ e mostriamo che tale quantità è uguale a $(n+1)^2$.
Possiamo notare che la sommatoria in esame può essere "spezzata" in due blocchi, la sommatoria dei primi n valori e l'ultimo valore (quello di indice $n+1$):

$$\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1)=\sum_{i=1}^{n}(2i-1)+(2(n+1)-1).$$

Ora possiamo applicare l'ipotesi induttiva

$$\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = \underline{\sum_{i=1}^{n}(2i-1)} + (2(n+1)-1) = \underline{n^2} + (2(n+1)-1)$$

e svolgendo i calcoli otteniamo quanto voluto

$$\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = \underline{\sum_{i=1}^{n}(2i-1)}+(2(n+1)-1) = \underline{n^2}+(2(n+1)-1) = n^2+2n+1 = (n+1)^2.$$

L'esercizio è completo perché si è dimostrato che la relazione vale per $n = 1$ (caso base) e che assumendo che la relazione valga per un qualsiasi valore (ipotesi induttiva) allora vale anche per il successivo (passo induttivo).

Soluzione Esercizio 100. *Calcoliamo il minimo caso ammissibile (il minimo n per cui la relazione è soddisfatta):*

- *se $n = 1$ otteniamo $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1 \not> \sqrt{1} = 1$ quindi per $n = 1$ la relazione non è soddisfatta;*
- *se $n = 2$ otteniamo $\sum_{k=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$, quindi se $1 + \frac{\sqrt{2}}{2} > \sqrt{2}$ allora la relazione è soddisfatta. Verifichiamo che $1 + \frac{\sqrt{2}}{2} > \sqrt{2}$:*
  $1 + \frac{\sqrt{2}}{2} > \sqrt{2}$ è equivalente a $1 > \frac{\sqrt{2}}{2}$ che è equivalente a $2 > \sqrt{2}$ che è vera. Quindi $n = 2$ è il minimo caso ammissibile.

Applichiamo l'induzione su n.
***Caso base**: se $n = 2$ otteniamo che la relazione in esame è vera, infatti abbiamo già mostrato che $\sum_{k=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{2}$.*
***Ipotesi induttiva**: Supponiamo che $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$ è soddisfatta per un qualsiasi valore n.*
***Passo induttivo**: Vogliamo dimostrare che la relazione vale anche per $n+1$, cioè vogliamo dimostrare che vale $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n+1}$.*
Possiamo notare che la sommatoria in esame può essere "spezzata" in due blocchi, la sommatoria dei primi n valori e l'ultimo valore (quello di indice $n + 1$):

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Ora possiamo applicare l'ipotesi induttiva

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \underline{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \underline{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n} + \frac{\sqrt{n+1}}{n+1}.$$

Quindi, per completare la nostra dimostrazione, dobbiamo mostrare che $\sqrt{n} + \frac{\sqrt{n+1}}{n+1} > \sqrt{n+1}$. *A tal fine possiamo notare che:*

$$\begin{aligned}
\sqrt{n} + \frac{\sqrt{n+1}}{n+1} > \sqrt{n+1} &\Leftrightarrow \sqrt{n} > \sqrt{n+1} - \frac{\sqrt{n+1}}{n+1} \\
&\Leftrightarrow \sqrt{n} > \frac{(n+1)\sqrt{n+1} - \sqrt{n+1}}{n+1} \\
&\Leftrightarrow \sqrt{n} > \frac{n\sqrt{n+1}}{n+1} \\
&\Leftrightarrow \frac{n+1}{n} > \sqrt{\frac{n+1}{n}}.
\end{aligned}$$

Dato che $\frac{n+1}{n} > \sqrt{\frac{n+1}{n}}$ *è soddisfatta per ogni* $n \geq 1$, *abbiamo completato la nostra dimostrazione per induzione.*

(Possono esistere diversi modi di svolgere il passo induttivo, in questo caso ad esempio si sarebbe potuto mostrare che

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} &= \underline{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\
&> \underline{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\
&= \frac{\sqrt{n}\sqrt{n+1} + 1}{\sqrt{n+1}} \\
&= \frac{\sqrt{n^2+n} + 1}{\sqrt{n+1}} \\
&> \frac{\sqrt{n^2} + 1}{\sqrt{n+1}} \\
&= \frac{n+1}{\sqrt{n+1}} \\
&= \sqrt{n+1}.)
\end{aligned}$$

Soluzione Esercizio 101. *Applichiamo l'induzione su n.*
Caso base*: se $n = 1$ otteniamo che la relazione in esame è valida, infatti sostituendo 1 ad ogni occorrenza della n otteniamo $\sum_{i=1}^{1} a^i = a^1 = a$ e $a\frac{1-a^1}{1-a} = a$.*
Ipotesi induttiva*: Supponiamo che $\sum_{i=1}^{n} a^i = a\frac{1-a^n}{1-a}$ è soddisfatta per un qualsiasi valore n.*
Passo induttivo*: Vogliamo dimostrare che la relazione vale anche per $n+1$, cioè vogliamo dimostrare che vale $\sum_{i=1}^{n+1} a^i = a\frac{1-a^{(n+1)}}{1-a}$.*
Riscriviamo la sommatoria in esame come

$$\sum_{i=1}^{n+1} a^i = \sum_{i=1}^{n} a^i + a^{(n+1)}$$

e applichiamo l'ipotesi induttiva

$$\underline{\sum_{i=1}^{n}} a^i + a^{(n+1)} = \underline{a\frac{1-a^n}{1-a}} + a^{(n+1)}.$$

Infine, svolgendo i calcoli otteniamo quanto desiderato, dato che

$$a\frac{1-a^n}{1-a} + a^{(n+1)} = a(\frac{1-a^n}{1-a} + a^n) = a\frac{1-a^n+a^n(1-a)}{1-a} = a\frac{1-a^{(n+1)}}{1-a}.$$

Soluzione Esercizio 103. *Applichiamo l'induzione su n.*
Caso base*: se $n = 0$ otteniamo $x^0 - y^0 = 1 - 1 = 0$ e siccome ogni numero divide 0 (**a** divide **b** implica che possiamo scrivere **b** come il prodotto di **a** per qualche intero e ovviamente possiamo scrivere 0 come il prodotto di qualsiasi numero per l'intero 0), anche $x - y$ divide 0.*
Ipotesi induttiva*: Supponiamo che $x - y$ divide $x^n - y^n$, per un qualsiasi valore n.*
Passo induttivo*: Vogliamo dimostrare che la relazione vale anche per $n+1$, cioè vogliamo dimostrare che $x - y$ divide $x^{(n+1)} - y^{(n+1)}$.*
Ora vogliamo riscrivere l'espressione $x^{(n+1)} - y^{(n+1)}$ in una forma in cui compaia il termine $x^n - y^n$, in modo tale che sia possibile applicare l'ipotesi induttiva. Possiamo notare che

$$x^{(n+1)} - y^{(n+1)} = x \cdot x^n - y \cdot y^n,$$

ma a questo punto non sembra sia possibile sviluppare ulteriormente i termini dell'espressione in modo utile. Possiamo però aggiungere e sottrarre una stessa quantità alla nostra espressione senza modificarne il valore:

$$x \cdot x^n - y \cdot y^n = x \cdot x^n - y \cdot y^n + y \cdot x^n - y \cdot x^n = x^n(x-y) + y(x^n - y^n).$$

Possiamo immediatamente notare che

1. $x-y$ *divide* x^n-y^n *per ipotesi induttiva e quindi divide anche* $y(x^n-y^n)$*;*

2. $x-y$ *divide se stesso e quindi divide anche* $x^n(x-y)$*.*

Dato che la somma di due numeri divisibili per uno stesso intero è ancora divisibile per lo stesso intero (dati due interi $\mathtt{b}$ *e* $\mathtt{c}$ *tali che* $\mathtt{a}|\mathtt{b}$ *e* $\mathtt{a}|\mathtt{c}$ *allora* $\mathtt{b} = \mathtt{a} \cdot k$ *e* $\mathtt{c} = \mathtt{a} \cdot w$ *per qualche* $k, w \in \mathbb{Z}$ *da cui segue che* $\mathtt{b} + \mathtt{c} = (k \cdot w)\mathtt{a}$ *e quindi* $\mathtt{a}|(\mathtt{b}+\mathtt{c})$*), otteniamo che* $x-y$ *divide* $x^n(x-y) + y(x^n-y^n)$ *che abbiamo mostrato essere uguale a* $x^{(n+1)} - y^{(n+1)}$*.*

Soluzione Esercizio 105. *Applichiamo l'induzione su n.*
Caso base*: se* $n = 1$ *otteniamo* $5^1 + 2 \cdot 3^0 + 1 = 5 + 2 + 1 = 8$ *che è banalmente divisibile per 8.*
Ipotesi induttiva*: Supponiamo che 8 divide* $5^n + 2 \cdot 3^{(n-1)} + 1$*, per un qualsiasi valore* n*.*
Passo induttivo*: Vogliamo dimostrare che la relazione vale anche per* $n+1$*, cioè vogliamo dimostrare che 8 divide* $5^{(n+1)} + 2 \cdot 3^{((n+1)-1)} + 1 = 5^{(n+1)} + 2 \cdot 3^n + 1$*.*
Ora vogliamo riscrivere l'espressione $5^{(n+1)} + 2 \cdot 3^n + 1$ *in una forma in cui compaia il termine* $5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$*, in modo tale che sia possibile applicare l'ipotesi induttiva. Possiamo notare che*

$$5^{(n+1)} + 2 \cdot 3^n + 1 = 5 \cdot 5^n + 2 \cdot 3 \cdot 3^{(n-1)} + 1,$$

ma a questo punto non sembra sia possibile sviluppare ulteriormente i termini dell'espressione in modo utile. Possiamo però aggiungere e sottrarre una stessa quantità alla nostra espressione senza modificarne il valore:

$$\begin{aligned} 5 \cdot 5^n + 2 \cdot 3 \cdot 3^{(n-1)} + 1 &= 5 \cdot 5^n + 2 \cdot 3 \cdot 3^{(n-1)} + 1 + 5^n + 2 \cdot 3^{(n-1)} + 1 - 5^n - 2 \cdot 3^{(n-1)} - 1 \\ &= 4 \cdot 5^n + 4 \cdot 3^{(n-1)} + 5^n + 2 \cdot 3^{(n-1)} + 1. \end{aligned}$$

Per ipotesi induttiva 8 divide $5^n + 2 \cdot 3^{(n-1)} + 1$*, quindi per completare la nostra dimostrazione per induzione dobbiamo mostrare che 8 divide* $4 \cdot 5^n + 4 \cdot 3^{(n-1)}$*.*

Possiamo notare immediatamente che tale quantità è divisibile per 4 dato che è uguale a $4(5^n+3^{(n-1)})$. *Quindi 8 divide* $4(5^n+3^{(n-1)})$ *se e solo se 2 divide* $(5^n+3^{(n-1)})$. *Non rimane allora che dimostrare che 2 divide* $(5^n+3^{(n-1)})$, *per ogni* $n \in \mathbb{N} \setminus 0$. *Sviluppiamo la dimostrazione per induzione.*
Applichiamo l'induzione su n.
Caso base: *se* $n=1$ *otteniamo* $5^1+3^0=5+1=6$ *che è divisibile per 2.*
Ipotesi induttiva: *Supponiamo che 2 divide* $5^n+3^{(n-1)}$, *per un qualsiasi valore* n.
Passo induttivo: *Vogliamo dimostrare che la relazione vale anche per* $n+1$, *cioè vogliamo dimostrare che 2 divide* $5^{(n+1)}+3^{((n+1)-1)}=5^{(n+1)}+3^n$.
Possiamo notare che

$$5^{(n+1)}+3^n=5\cdot 5^n+3\cdot 3^{(n-1)}$$

da cui, aggiungendo e sottraendo $5^n+3^{(n-1)}$, *otteniamo*

$$5\cdot 5^n+3\cdot 3^{(n-1)}=5\cdot 5^n+3\cdot 3^{(n-1)}+5^n+3^{(n-1)}-5^n-3^{(n-1)}=4\cdot 5^n+2\cdot 3^{(n-1)}+5^n+3^{(n-1)}.$$

Possiamo immediatamente notare che

1. *2 divide* $5^n+3^{(n-1)}$ *per ipotesi induttiva;*
2. *2 divide* $4\cdot 5^n$;
3. *2 divide* $2\cdot 3^{(n-1)}$.

Dato che la somma di due numeri divisibili per uno stesso intero è ancora divisibile per lo stesso intero (vedi la soluzione dell'esercizio precedente), otteniamo che 2 divide $4\cdot 5^n+2\cdot 3^{(n-1)}+5^n+3^{(n-1)}$, *da cui segue che 2 divide* $5^n+3^{(n-1)}$, *per ogni* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, *da cui, per quanto mostrato precedentemente, otteniamo che 8 divide* $5^{(n+1)}+2\cdot 3^n+1$, *per ogni* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Soluzione Esercizio *. *Applichiamo l'induzione su* n.
Caso base: *se* $n=0$ *otteniamo che la relazione in esame è vera, infatti* $\sum_{k=0}^{0}(k\cdot k!)=0\cdot 0!=0$ *e* $(0+1)!-1=1!-1=1-1=0$.
Ipotesi induttiva: *Supponiamo che* $\sum_{k=0}^{n}(k\cdot k!)=(n+1)!-1$ *è soddisfatta per un qualsiasi valore* n.
Passo induttivo: *Vogliamo dimostrare che la relazione vale anche per* $n+1$, *cioè vogliamo dimostrare che vale*

$$\sum_{k=0}^{n+1}(k\cdot k!)=((n+1)+1)!-1=(n+2)!-1.$$

Riscriviamo la sommatoria in esame come

$$\sum_{k=0}^{n+1}(k \cdot k!) = \sum_{k=0}^{n}(k \cdot k!) + (n+1)\cdot(n+1)!$$

e applichiamo l'ipotesi induttiva

$$\underline{\sum_{k=0}^{n}(k \cdot k!)} + (n+1)\cdot(n+1)! = \underline{(n+1)! - 1} + (n+1)\cdot(n+1)!$$

Infine, svolgendo i calcoli otteniamo quanto desiderato, dato che

$$(n+1)! - 1 + (n+1)\cdot(n+1)! = (n+2)(n+1)! - 1 = (n+2)! - 1.$$

Soluzione Esercizio Esercizio 6 del primo esonero dell'anno accademico 2006/07 (compito fila A).
Applichiamo l'induzione su n.
Caso base*:*

- *se $n = 0$ otteniamo che $2^0 + 3^0 + 5^0 = 1 + 1 + 1 = 3 \not\leq 10^0 = 1$, quindi $n = 0$ non è il minimo caso ammissibile (il minimo $n \in \mathbb{N}$ che soddisfa la proprietà);*

- *se $n = 1$ otteniamo che $2^1 + 3^1 + 5^1 = 2 + 3 + 5 = 10 \leq 10^1 = 10$, per cui $n = 1$ è il caso base della nostra dimostrazione per induzione.*

Ipotesi induttiva*: Supponiamo che $2^n + 3^n + 5^n \leq 10^n$ è soddisfatta per un qualsiasi valore n.*
Passo induttivo*: Vogliamo dimostrare che la relazione vale anche per $n+1$, cioè vogliamo dimostrare che vale $2^{(n+1)} + 3^{(n+1)} + 5^{(n+1)} \leq 10^{(n+1)}$.*
Possiamo notare che

$$2^{(n+1)} + 3^{(n+1)} + 5^{(n+1)} = 2 \cdot 2^n + 3 \cdot 3^n + 5 \cdot 5^n$$

e (per poter applicare l'ipotesi induttiva) possiamo maggiorare tale quantità nel modo seguente:

$$2 \cdot 2^n + 3 \cdot 3^n + 5 \cdot 5^n \leq 10 \cdot 2^n + 10 \cdot 3^n + 10 \cdot 5^n = 10 \cdot (2^n + 3^n + 5^n).$$

Applicando l'ipotesi induttiva otteniamo quanto richiesto

$$10 \cdot \underline{(2^n + 3^n + 5^n)} \leq 10 \cdot \underline{10^n} = 10^{(n+1)}.$$

Soluzione Esercizio Esercizio 6 del primo esonero dell'anno accademico 2006/07 (compito fila B).

*Per come è costruito **L** è immediato notare che le parole in **L** hanno tutte lunghezza pari, dato che **L** è costruito partendo dalla parola di lunghezza zero* ϵ *e aggiungendo ogni volta 2 simboli per ottenere un'altra parola in **L**.*

Sia allora $|w|$ *la lunghezza della parola* w*. Applichiamo l'induzione su* $\frac{|w|}{2}$ *(che è un numero intero dato che* $|w|$ *è pari).*

***Caso base**: se* $\frac{|w|}{2} = 0$*, allora* $|w| = 0$ *e quindi* $w = \epsilon$*, la parola vuota, che per definizione appartiene a **L**. La parola* ϵ *soddisfa la proprietà richiesta (è banalmente vero che i suoi primi 0 simboli sono tutti 0 e gli altri tutti 1).*

***Ipotesi induttiva**: Supponiamo che, per un valore* $\frac{|w|}{2}$ *qualsiasi, tutte le parole di lunghezza* $|w|$ *appartenenti a **L** sono tali che i primi* $\frac{|w|}{2}$ *simboli sono tutti 0 e gli altri tutti 1. Per come è definito **L**, questo significa che esiste in **L** una sola parola* w *con queste caratteristiche (dato che per come è costruito, **L** non può contenere due parole diverse di uguale lunghezza).*

***Passo induttivo**: Vogliamo dimostrare che la relazione in esame vale anche per* $\frac{|w|}{2}+1$*, cioè vogliamo dimostrare che tutte le parole di lunghezza* $(|w|+2)$ *appartenenti a **L** sono tali che i primi* $\frac{|w|}{2}+1$ *simboli sono tutti 0 e gli altri tutti 1.*

Per ipotesi induttiva, esiste una parola w *appartenente a **L** che ha lunghezza uguale a* $|w|$ *ed i suoi primi* $\frac{|w|}{2}$ *simboli sono tutti 0 e gli altri tutti 1. Allora otteniamo che l'unica parola di lunghezza* $(|w|+2)$ *che appartiene a **L** è* $w' = 0w1$ *(per come è definito **L**) ed è immediato notare che i suoi primi* $\frac{|w|}{2}+1$ *simboli sono tutti 0 e gli altri tutti 1.*