Soluzioni della Nona Esercitazione di Metodi matematici per l'informatica (Canale A-D)

Francesco Davì

16 gennaio 2009

Soluzioni degli esercizi preparatori per l'esame scritto

1. *Riscriviamo l'enunciato* $(A \to B) \vee (B \to A)$ *in termini di implicazioni e negazioni, utilizzando le equivalenze logiche. Dato che* $A \vee B$ *è equivalente a* $\neg A \to B$*, otteniamo che l'enunciato* $(A \to B) \vee (B \to A)$ *è equivalente a*

$$\neg(A \to B) \to (B \to A).$$

Una dimostrazione allora è la seguente:

1.	$\{B, \neg A, A\}$	$\vdash B$	*Ipotesi*
2.	$\{B, \neg A\}$	$\vdash A \to B$	*Deduzione 1*
3.	$\{B\}$	$\vdash \neg A \to (A \to B)$	*Deduzione 2*
4.	$\{B\}$	$\vdash \neg A \to \neg\neg(A \to B)$	*Doppia negazione 3*
5.	$\{B\}$	$\vdash \neg(A \to B) \to A$	*Contrapposizione 4*
6.		$\vdash B \to (\neg(A \to B) \to A)$	*Deduzione 5*
7.		$\vdash \neg(A \to B) \to (B \to A)$	*Scambio premessa 6*
8.		$\vdash (A \to B) \vee (B \to A)$	*Equivalenza logica 7*

Ancora una volta, possiamo notare che non esiste necessariamente un'unica dimostrazione e che è possibile ottenere una dimostrazione corretta effettuando ragionamenti diversi o approcciando l'esercizio in modi differenti, l'importante è che la soluzione presentata sia corretta (evitando possibilmente *passaggi inutili).*

2. *Costruiamo il tableau della formula in esame (senza negarla). Se otteniamo almeno un ramo aperto allora la formula è soddisfacibile. Il tableau della formula è il seguente:*

$$
\begin{array}{ccc}
 & \forall x(P(x) \lor Q(x))\underline{\rightarrow}\exists x(P(x) \rightarrow Q(x)) & \\
 / & & \backslash \\
\underline{\neg\forall x}(P(x) \lor Q(x)) & & \underline{\exists x}(P(x) \rightarrow Q(x)) \\
| & & | \\
\underline{\neg}(P(a)\underline{\lor}Q(a)) & & P(a)\underline{\rightarrow}Q(a) \\
| & & / \quad\quad \backslash \\
\neg P(a), \neg Q(a) & & \neg P(a) \quad\quad Q(a)
\end{array}
$$

Possiamo notare che tutti e tre i nodi sono aperti. Comunque sarebbe stato sufficiente mostrare un solo nodo aperto del tableau per affermare che la formula è soddisfacibile.
Il fatto che la formula sia soddisfacibile implica che esiste almeno un dominio ed un'interpretazione dei predicati P e Q, tali che la formula è soddisfatta. Fornire un modello per la formula significa esattamente fornire un esempio di dominio e interpretazioni per cui la formula è soddisfatta.
Per trovare un modello possiamo notare che la formula è costituita da un'implicazione e quindi affinché sia soddisfatta, non deve accadere che $\forall x(P(x) \lor Q(x))$ sia vero e contemporaneamente $\exists x(P(x) \rightarrow Q(x))$ sia falso. Quindi qualsiasi dominio e interpretazioni di P e Q che non permettono ciò sono dei modelli per la formula. In particolare, potremmo scegliere il dominio $D = \mathbb{N}$ e $|P| = \{x : x \in D, x \geq 0\}$ e $|Q| = \{x : x \in D, x > -1\}$, in quanto con queste impostazioni si ottiene che $P(x)$ e $Q(x)$ sono veri per ogni elemento del dominio (ogni numero naturale è infatti maggiore o uguale a zero e maggiore di un numero negativo) e quindi sia $\forall x(P(x) \lor Q(x))$ che $\exists x(P(x) \rightarrow Q(x))$ sono veri e di conseguenza la formula $\forall x(P(x) \lor Q(x)) \rightarrow \exists x(P(x) \rightarrow Q(x))$ è soddisfatta.
Un altro modo per trovare un modello, spesso più rapido e generale, consiste nello sfruttare le informazioni che troviamo nei nodi aperti, infatti se un modello soddisfa un nodo aperto allora soddisferà anche l'intera formula (per la definizione del tableau). In particolare, inseriremo nel dominio le costanti utilizzate nel nodo e definiremo i predicati in modo tale che soddisfino le istanze degli stessi presenti nel nodo (nel caso in cui un predicato non appare

vuol dire che possiamo interpretarlo in qualunque modo, senza che questo pregiudichi la soddisfacibilità della formula).
Nel nostro esempio, i nodi aperti suggeriscono i seguenti modelli:

- $D = \{a\}$, $|P| = \emptyset$ *e* $|Q| = \emptyset$, *in quanto in questo modo sia* $\neg P(a)$ *che* $\neg Q(a)$ *sono soddisfatte (infatti dire che* $\neg P(a)$ *è soddisfatta significa che l'elemento* a *del dominio non appartiene alla relazione* P *o, equivalentemente, che per* a *non vale la relazione* P*);*

- $D = \{a\}$, $|P| = \emptyset$ *e* $|Q|$ *qualunque, in quanto in questo modo è soddisfatta* $\neg P(a)$*;*

- $D = \{a\}$, $|P|$ *qualunque e* $|Q| = \{a\}$, *in quanto in questo modo è soddisfatta* $Q(a)$.

Nel secondo e nel terzo caso è stata definita l'interpretazione di un solo predicato in quanto ciò è sufficiente per ottenere che la formula $\exists x(P(x) \to Q(x))$ *sia soddisfatta (da cui si ottiene che l'intera formula* $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \to \exists x(P(x) \to Q(x))$ *è soddisfatta per come è definita la tavola di verità dell'implicazione). Infatti:*

- *se* $|P| = \emptyset$ *allora non esiste alcun elemento del dominio per cui* P *è soddisfatta e allora* $P(x)$ *è falsa per ogni elemento del dominio e quindi* $\exists x(P(x) \to Q(x))$ *è vera qualunque sia l'interpretazione di* Q*;*

- *se* $|Q| = \{a\}$ *allora* $Q(a)$ *è vera e quindi esiste (almeno) un elemento del dominio per cui* Q *è soddisfatta, da cui segue che* $\exists x(P(x) \to Q(x))$ *è vera qualunque sia l'interpretazione di* P.