Soluzioni della Settima Esercitazione di Metodi matematici per l'informatica (Canale A-D)

Francesco Davì

19 dicembre 2008

Soluzioni degli esercizi

Soluzione Esercizio 157. (6)

- *Tavola di verità:*

A	B	C	$A \to C$	$B \to C$	$(A \to C) \wedge (B \to C)$	$A \vee B$	$(A \vee B) \to C$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	F	V	F
V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	V	F
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	F
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	F	V

da cui segue che

$((A \to C) \wedge (B \to C)) \to ((A \vee B) \to C)$
V
V
V
V
V
V
V
V

Dato che la colonna corrispondente all'enunciato in esame è composta da tutti valori di vero l'enunciato è una tautologia.

- *Tableau:*
  Costruiamo il tableau della formula che rappresenta la negazione dell'enunciato in esame. Se otteniamo un tableau chiuso la formula è insoddisfacibile e quindi l'enunciato è una tautologia.

$$\underline{\neg}(((A \to C) \land (B \to C))\underline{\to}((A \lor B) \to C))$$
$$|$$
$$(A \to C) \land (B \to C), \underline{\neg}((A \lor B)\underline{\to}C)$$
$$|$$
$$(A \to C)\underline{\land}(B \to C), A \lor B, \neg C$$
$$|$$
$$A \to C, B \to C, A\underline{\lor}B, \neg C$$
$$\begin{array}{cc} / & \backslash \\ A\underline{\to}C, B \to C, A, \neg C & A\underline{\to}C, B \to C, B, \neg C \end{array}$$
$$\begin{array}{cccc} / & \backslash & / & \backslash \\ \neg A, B \to C, A, \neg C & C, B \to C, A, \neg C & \neg A, B\underline{\to}C, B, \neg C & C, B \to C, B, \neg C \\ \times & \times & / \quad \backslash & \times \end{array}$$
$$\begin{array}{cc} \neg A, \neg B, B, \neg C & \neg A, C, B, \neg C \\ \times & \times \end{array}$$

Il tableau è chiuso quindi $\neg(((A \to C) \land (B \to C)) \to ((A \lor B) \to C))$ è insoddisfacibile. Allora $((A \to C) \land (B \to C)) \to ((A \lor B) \to C)$ è una tautologia.

Soluzione Esercizio 162. *Riscriviamo l'enunciato $A \to (A \lor (B \land C))$ in termini di implicazioni e negazioni, utilizzando le equivalenze logiche. Dato che $A \land B$ è equivalente a $\neg(A \to \neg B)$, l'enunciato $A \to (A \lor (B \land C))$ è equivalente a $A \to (A \lor (\neg(B \to \neg C)))$. Dato che $A \lor B$ è equivalente a $\neg A \to B$, l'enunciato $A \to (A \lor (\neg(B \to \neg C)))$ è equivalente a*

$$A \to (\neg A \to (\neg(B \to \neg C))).$$

Una dimostrazione è allora la seguente:

1.	$\{A\}$	$\vdash A \to ((B \to C) \to A)$	*Assioma 1*
2.	$\{A\}$	$\vdash A$	*Ipotesi*
3.	$\{A\}$	$\vdash (B \to C) \to A$	*MP 1,2*
4.	$\{A\}$	$\vdash \neg A \to (\neg(B \to C))$	*Contrapposizione 3*
5.		$\vdash A \to (\neg A \to (\neg(B \to \neg C)))$	*Deduzione 4*

Soluzione Esercizio *. *Potremmo risolvere l'esercizio semplicemente notando che, dato che $A \to B$ è equivalente a $\neg B \to \neg A$, l'enunciato $\neg A \to (A \to B)$ è equivalente a $\neg A \to (\neg B \to \neg A)$ e dato che quest'ultimo enunciato è l'Assioma 1 (ricordatevi che quando utilizziamo gli Assiomi possiamo sostituire alle occorrenze dei letterali le formule che vogliamo, purché ad ogni occorrenza dello stesso letterale sostituiamo la stessa formula), è banalmente valido nel sistema di Hilbert.*
Se volessimo fornire una dimostrazione senza utilizzare le equivalenze logiche, potremmo esibire la seguente:

1.	$\{\neg A\}$	$\vdash \neg A \to (\neg B \to \neg A)$	*Assioma 1*
2.	$\{\neg A\}$	$\vdash \neg A$	*Ipotesi*
3.	$\{\neg A\}$	$\vdash \neg B \to \neg A$	*MP 1,2*
4.	$\{\neg A\}$	$\vdash A \to B$	*Contrapposizione 3*
5.		$\vdash \neg A \to (A \to B)$	*Deduzione 4*

Potremmo inoltre presentare una dimostrazione più complessa ma ugualmente corretta:

1.	$\{\neg A, A\}$	$\vdash \neg A \to (\neg B \to \neg A)$	*Assioma 1*
2.	$\{\neg A, A\}$	$\vdash \neg A$	*Ipotesi*
3.	$\{\neg A, A\}$	$\vdash \neg B \to \neg A$	*MP 1,2*
4.	$\{\neg A, A\}$	$\vdash (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$	*Assioma 3*
5.	$\{\neg A, A\}$	$\vdash A \to B$	*MP 3,4*
6.	$\{\neg A, A\}$	$\vdash A$	*Ipotesi*
7.	$\{\neg A, A\}$	$\vdash B$	*MP 5,6*
8.	$\{\neg A\}$	$\vdash A \to B$	*Deduzione 7*
9.		$\vdash \neg A \to (A \to B)$	*Deduzione 8*