Soluzioni della Terza Esercitazione di Metodi matematici per l'informatica (Canale A-D)

Francesco Davì

17 ottobre 2008

Soluzioni degli esercizi

Soluzione Esercizio *. *Nella Seconda Esercitazione abbiamo visto che la relazione $\subseteq$ soddisfa le proprietà riflessiva, antisimmetrica e transitiva, quindi $\subseteq$ è una relazione d'ordine largo. Tale relazione è inoltre parziale in quanto è possibile mostrare coppie di insiemi C, D tali che $C \nsubseteq D$ e $D \nsubseteq C$ (è sufficiente considerare i due insiemi C, D disgiunti).*
La relazione $\subset$ gode delle seguenti proprietà:

- ***antiriflessiva**, in quanto per ogni insieme A vale $A \not\subset A$;*
- ***asimmetrica**, in quanto dati due insiemi A e B se $A \subset B$ allora $B \not\subset A$;*
- ***transitiva**, in quanto dati tre insiemi A, B e C se $A \subset B$ (tutti gli elementi di A appartengono anche a B ma $A \neq B$) e $B \subset C$ (tutti gli elementi di B appartengono anche a C ma $B \neq C$) allora $A \subset C$ (tutti gli elementi di A appartengono anche a C ma $A \neq C$).*

Invece, la relazione non gode delle seguenti proprietà:

- ***riflessiva**, in quanto per ogni insieme A vale $A \not\subset A$;*
- ***simmetrica**, in quanto dati due insiemi A e B se $A \subset B$ allora $B \not\subset A$.*

Tale relazione è quindi una relazione di ordine stretto perchè soddisfa le proprietà antiriflessiva e transitiva. Inoltre $\subset$ è una relazione parziale per lo stesso motivo della relazione $\subseteq$.

Soluzione Esercizio 34. *Vedi il libro di testo, pag. 24. Sostituisci a $\mathbb{Z}^+$ il simbolo $\mathbb{Z}_0$.*

Soluzione Esercizio 46. *Per risolvere l'esercizio, dobbiamo definire una relazione $\simeq$ tra coppie di numeri naturali in modo tale che la relazione $\simeq$ sia una relazione di equivalenza (dobbiamo quindi dimostrare che gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva) e che le classi di equivalenza di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ rispetto alla relazione $\simeq$ rappresentino i numeri interi (quindi, se $(a, b) \simeq (c, d)$ con $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ allora (a, b) e (c, d) rappresentano lo stesso numero intero, in quanto appartengono ad una stessa classe di equivalenza).*
Un'idea potrebbe essere allora la seguente:

$$(a, b) \simeq (c, d) \text{ se e solo se } a - b = c - d.$$

(Esistono formulazioni equivalenti, ad esempio $a - c = b - d$, altrettanto valide ma esistono anche formulazioni che non definiscono relazioni di equivalenza, ad esempio $a - b = d - c$.)
Verifichiamo che la relazione appena definita gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.
*Proprietà **riflessiva**:*
Per ogni $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ vale $a - b = a - b$ per cui $(a, b) \simeq (a, b)$.
*Proprietà **simmetrica**:*
Dati $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, se $(a, b) \simeq (c, d)$ allora $a - b = c - d$ da cui ovviamente $c - d = a - b$ per cui $(c, d) \simeq (a, b)$.
*Proprietà **transitiva**:*
Dati $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, se $(a, b) \simeq (c, d)$ e $(c, d) \simeq (e, f)$ allora $a - b = c - d$ e $c - d = e - f$ da cui segue $a - b = e - f$, quindi $(a, b) \simeq (e, f)$.
Possiamo inoltre notare che tutte le coppie appartenenti ad una stessa classe di equivalenza $[(a, b)]$ (quelle coppie $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tali che $(a, b) \simeq (x, y)$) sono tali che la differenza del primo valore e del secondo è uguale a $a - b$. Siccome $a, b \in \mathbb{N}$ vale che $(a - b) \in \mathbb{Z}$, per cui possiamo associare ad ogni classe di equivalenza $[(a, b)]$ il numero intero $(a - b)$, quindi $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/_{\simeq}$ può

essere utilizzato per definire i numeri interi $\mathbb{Z}$.

Soluzione Esercizio 52. *Vedi il libro di testo, pag. 36.*

Soluzione Esercizio 55. *Vedi l'errata corrige del libro. La soluzione presentata dal libro contiene un errore.*

Soluzione Esercizio 61. *Il fatto che f sia una funzione da A a B implica che per ogni elemento $\mathfrak{a} \in A$ esiste uno ed un solo elemento $\mathfrak{b} \in B$ tale che $f(\mathfrak{a}) = \mathfrak{b}$.*

(i) Se f è iniettiva allora per ogni $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in A$, con $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{y}$, vale $f(\mathfrak{x}) \neq f(\mathfrak{y})$, quindi per ogni elemento in A esiste almeno un elemento in B (dato che ogni elemento di A ha un'unica immagine distinta in B) ma B può contenere anche elementi che non sono immagini di alcun elemento di A (secondo f), quindi $m \leq n$;

(ii) Se f è suriettiva allora per ogni $\mathfrak{b} \in B$ esiste almeno un elemento $\mathfrak{a} \in A$ tale che $f(\mathfrak{a}) = \mathfrak{b}$ quindi A contiene almeno tanti elementi quanti ne contiene B (dato che ogni elemento di A può avere una sola immagine in B (secondo f)) ma A può contenere più elementi che hanno la stessa immagine in B (secondo f), per cui $m \geq n$;

(iii) Se f è biiettiva allora f è iniettiva e suriettiva quindi $m \leq n$ e $m \geq n$ da cui segue $m = n$.

Soluzione Esercizio 62. *Per risolvere l'esercizio è sufficiente mostrare una funzione da A a B che è biiettiva. Definiamo allora $f : A \to B$ nel seguente modo:*

$$f(\mathfrak{a}_i) = \mathfrak{b}_i \text{ per ogni } i \in \{1, \ldots, m\}$$

(quindi $f(\mathfrak{a}_1) = \mathfrak{b}_1, \ldots, f(\mathfrak{a}_m) = \mathfrak{b}_m$).
La funzione è banalmente iniettiva e suriettiva, quindi è biiettiva.
(Attenzione: esistono molte altre funzioni biiettive da A a B (sapreste dire esattamente quante?) ma per risolvere l'esercizio è sufficiente mostrarne una).

Soluzione Esercizio 65. *Dobbiamo dimostrare una "doppia implicazione":*

$$f : A \to B \text{ è biiettiva } \Leftrightarrow \text{ esiste } g : B \to A \text{ tale che } g \circ f = i_A \text{ e } f \circ g = i_B.$$

Dobbiamo quindi dimostrare entrambi i versi dell'implicazione:
($\Rightarrow$) se $f : A \to B$ è biiettiva allora esiste una funzione $g : B \to A$ tale che $g \circ f = i_A$ e $f \circ g = i_B$;
($\Leftarrow$) data $f : A \to B$, se esiste una funzione $g : B \to A$ tale che $g \circ f = i_A$ e $f \circ g = i_B$ allora f è biiettiva.
Dimostrazione:
($\Rightarrow$) Dato che f è biiettiva, esiste la funzione inversa $f^{-1} : B \to A$, la quale si comporta esattamente nel modo desiderato, infatti, per definizione, $f^{-1} \circ f = i_A$ e $f \circ f^{-1} = i_B$. Quindi ponendo $g := f^{-1}$ l'esercizio è risolto, in quanto abbiamo mostrato (utilizzando l'ipotesi che f sia biiettiva) che una funzione che si comporti come richiesto esiste.
($\Leftarrow$) Dobbiamo dimostrare che f è sia iniettiva che suriettiva.
Intuitivamente, f è iniettiva perchè se applichiamo f ad un elemento $\mathtt{a} \in A$ otteniamo un elemento $\mathtt{b} \in B$ (quindi $f(\mathtt{a}) = \mathtt{b}$) e se applichiamo g a tale $\mathtt{b}$ otteniamo nuovamente $\mathtt{a}$, dato che $g \circ f = i_A$, e se esistesse un elemento $\mathtt{a}' \in A$, con $\mathtt{a}' \neq \mathtt{a}$, tale che $f(\mathtt{a}') = \mathtt{b}$ (quindi f non sarebbe iniettiva), dovrebbe valere che $g(\mathtt{b}) = g(f(\mathtt{a}')) = \mathtt{a}'$ ma allora g non sarebbe una funzione dato che $g(\mathtt{b}) = \mathtt{a}$ e $g(\mathtt{b}) = \mathtt{a}'$, con $\mathtt{a}' \neq \mathtt{a}$.
La dimostrazione appena mostrata si legge però faticosamente e può risultare poco chiara. Cerchiamo allora di dare una dimostrazione formale del fatto che f sia iniettiva. A tale scopo, utilizzeremo una dimostrazione per assurdo, un metodo standard, in cui per dimostrare una tesi partendo da determinate ipotesi, si nega ciò che si vuole dimostrare (la tesi) e si mostra che si giunge ad una contraddizione (ad un fatto che contraddice le ipotesi oppure un'affermazione falsa). Il fatto che considerando la negazione della tesi si giunga ad una contraddizione delle ipotesi implica che la tesi originale deve essere vera.
Supponiamo quindi per assurdo che f non sia iniettiva. Allora esistono due elementi $\mathtt{x}, \mathtt{y} \in A$, con $\mathtt{x} \neq \mathtt{y}$, tali che $f(\mathtt{x}) = f(\mathtt{y}) = \mathtt{b}$, con $\mathtt{b} \in B$. Ma, dato che $g \circ f = i_A$, si ha che $\mathtt{x} = g(f(\mathtt{x})) = g(\mathtt{b}) = g(f(\mathtt{y})) = \mathtt{y}$ che contraddice il fatto che $\mathtt{x} \neq \mathtt{y}$, come richiesto dalle nostre ipotesi. Allora l'assunzione che f non è iniettiva è falsa e quindi f è iniettiva.
Intuitivamente, f è suriettiva perchè se esistesse un elemento $\mathtt{b} \in B$ tale che non esiste alcun elemento $\mathtt{a} \in A$ tale che $f(\mathtt{a}) = \mathtt{b}$ non sarebbe vero che

$f \circ g = i_B$ dato che $f(g(\mathtt{b})) \neq \mathtt{b}$.
Anche in questo caso cerchiamo di dare una dimostrazione formale del fatto che f è suriettiva, utilizzando la dimostrazione per assurdo.
Supponiamo per assurdo che f non sia suriettiva. Allora esiste un elemento $\mathtt{b} \in B$ tale che per ogni elemento $\mathtt{a} \in A$ vale $f(\mathtt{a}) \neq \mathtt{b}$. Dato che g è una funzione, ogni elemento di B ha una ed una sola immagine in A (secondo g). In particolare esisterà un elemento $\mathtt{a}' \in A$ tale che $g(\mathtt{b}) = \mathtt{a}'$. Ma $f(\mathtt{a}') \neq \mathtt{b}$ (per la nostra ipotesi per assurdo) quindi si ha che $f(\mathtt{a}') = f(g(\mathtt{b})) \neq \mathtt{b}$ che contraddice il fatto che $f \circ g = i_B$, come richiesto dalle nostre ipotesi. Allora l'assunzione che f non è suriettiva è falsa e quindi f è suriettiva.
Dato che f è iniettiva e suriettiva, f è biiettiva.
(Attenzione: nel risolvere un esercizio che richiede una dimostrazione, è preferibile presentare una dimostrazione il più formale possibile (che utilizzi quindi le definizioni e un linguaggio matematico), in quanto più elegante, più rigorosa e, se bene impostata e svolta, assolutamente non ambigua.)