Soluzioni dell'Ottava Esercitazione di Metodi matematici per l'informatica (Canale A-D)

Francesco Davì

13 gennaio 2009

Soluzioni degli esercizi

Soluzione Esercizio *. *Riscriviamo l'enunciato* $A \to (B \to (A \wedge B))$ *in termini di implicazioni e negazioni, utilizzando le equivalenze logiche. Dato che* $A \wedge B$ *è equivalente a* $\neg(A \to \neg B)$*, otteniamo che l'enunciato* $A \to (B \to (A \wedge B))$ *è equivalente a*

$$A \to (B \to (\neg(A \to \neg B))).$$

Una dimostrazione allora è la seguente:

1.	$\{A, B, A \to \neg B\}$	$\vdash A \to \neg B$	*Ipotesi*
2.	$\{A, B, A \to \neg B\}$	$\vdash A$	*Ipotesi*
3.	$\{A, B, A \to \neg B\}$	$\vdash \neg B$	*MP 1,2*
4.	$\{A, B\}$	$\vdash (A \to \neg B) \to \neg B$	*Deduzione 3*
5.	$\{A, B\}$	$\vdash \neg\neg B \to (\neg(A \to \neg B))$	*Contrapposizione 4*
6.	$\{A, B\}$	$\vdash B$	*Ipotesi*
7.	$\{A, B\}$	$\vdash \neg\neg B$	*Doppia negazione 6*
8.	$\{A, B\}$	$\vdash \neg(A \to \neg B)$	*MP 5,7*
9.	$\{A\}$	$\vdash B \to (\neg(A \to \neg B))$	*Deduzione 8*
10.		$\vdash A \to (B \to (\neg(A \to \neg B)))$	*Deduzione 9*

(Attenzione: Come più volte è stato evidenziato, non esiste necessariamente un unico modo di svolgere una dimostrazione di questo tipo. Ovviamente, una dimostrazione più compatta e semplice è preferibile ad una lunga e complicata. Comunque è fondamentale che ogni passaggio sia giustificato e che

le regole siano applicate correttamente).

Soluzione Esercizio +. *Costruiamo il tableau della formula che rappresenta la negazione dell'enunciato in esame. Se otteniamo un tableau chiuso la formula è insoddisfacibile e quindi l'enunciato è una tautologia.*

$$
\begin{array}{c}
\underline{\neg}(\forall x \exists y (P(x,y) \vee Q(x,y)) \underline{\rightarrow} \forall x (\exists y (P(x,y) \vee \exists z Q(x,z))))\\
|\\
\forall x \exists y (P(x,y) \vee Q(x,y)), \underline{\neg \forall x} (\exists y (P(x,y) \vee \exists z Q(x,z)))\\
|\\
\underline{\forall x} \exists y (P(x,y) \vee Q(x,y)), \neg \exists y (P(a,y) \vee \exists z Q(a,z))\\
|\\
\forall x \exists y (P(x,y) \vee Q(x,y)), \underline{\exists y} (P(a,y) \vee Q(a,y)), \neg \exists y (P(a,y) \vee \exists z Q(a,z))\\
|\\
\forall x \exists y (P(x,y) \vee Q(x,y)), (P(a,b) \vee Q(a,b)), \underline{\neg \exists y} (P(a,y) \vee \exists z Q(a,z))\\
|\\
\forall x \exists y (P(x,y) \vee Q(x,y)), (P(a,b) \vee Q(a,b)),\\
\neg \exists y (P(a,y) \vee \exists z Q(a,z)), \underline{\neg} (P(a,b) \underline{\vee} \exists z Q(a,z))\\
|\\
\forall x \exists y (P(x,y) \vee Q(x,y)), (P(a,b) \vee Q(a,b)),\\
\neg \exists y (P(a,y) \vee \exists z Q(a,z)), \neg P(a,b), \underline{\neg \exists z} Q(a,z\\
|\\
\forall x \exists y (P(x,y) \vee Q(x,y)), (P(a,b) \underline{\vee} Q(a,b)),\\
\neg \exists y (P(a,y) \vee \exists z Q(a,z)), \neg P(a,b), \neg \exists z Q(a,z), \neg Q(a,b)\\
\begin{array}{cc}
/ & \backslash\\
\forall x \exists y (P(x,y) \vee Q(x,y)), & \forall x \exists y (P(x,y) \vee Q(x,y)),\\
\underline{P(a,b)}, & \underline{Q(a,b)},\\
\neg \exists y (P(a,y) \vee \exists z Q(a,z)), & \neg \exists y (P(a,y) \vee \exists z Q(a,z)),\\
\underline{\neg P(a,b)}, & \neg P(a,b),\\
\neg \exists z Q(a,z), & \neg \exists z Q(a,z),\\
\neg Q(a,b) & \underline{\neg Q(a,b)}\\
\times & \times
\end{array}
\end{array}
$$

Il tableau è chiuso quindi $\neg(\forall x \exists y (P(x,y) \vee Q(x,y)) \rightarrow \forall x (\exists y (P(x,y) \vee \exists z Q(x,z))))$ *è insoddisfacibile. Allora*

$$\forall x \exists y (P(x,y) \vee Q(x,y)) \rightarrow \forall x (\exists y (P(x,y) \vee \exists z Q(x,z)))$$

è una tautologia.

Soluzione Esercizio 182. (1) *Costruiamo il tableau della formula in esame (senza negarla). Se otteniamo almeno un ramo aperto allora la formula è soddisfacibile.*

$$\begin{array}{c} \forall x P(x) \underline{\wedge} \exists y Q(y) \\ | \\ \forall x P(x), \underline{\exists y} Q(y) \\ | \\ \forall x P(x), Q(a) \\ | \\ \forall x P(x), P(a), Q(a) \end{array}$$

Sarebbe possibile continuare il tableau all'infinito, applicando ripetutamente la γ-regola alla formula $\forall x P(x)$, ma possiamo notare che non è possibile ottenere la chiusura del tableau, dato che non è possibile ottenere una negazione né del predicato $P(x)$, per ogni x, né del predicato $Q(a)$.
Allora la formula $\forall x P(x) \wedge \exists y Q(y)$ è soddisfacibile. Ciò vuol dire che esiste un dominio e un'interpretazione dei predicati P e Q tali che la formula risulta vera.
Per fornire un modello per tale formula, dobbiamo quindi stabilire un'interpretazione dei predicati P e Q in modo tale che per ogni elemento del dominio valga P e per almeno un elemento del dominio valga Q.
Scegliamo, ad esempio, come dominio l'insieme dei numeri naturali, ponendo $D = \mathbb{N}$. Allora potremmo definire $|P| = \{x : x \in D, x \geq 0\}$ e $|Q| = \{x : x \in D, x = 2\}$, in quanto ogni numero naturale è maggiore uguale a zero e un numero naturale è uguale a 2.
Se volessimo presentare un modello più astratto, potremmo utilizzare le informazioni che troviamo su un ramo aperto del tableau (in questo caso particolare abbiamo un solo ramo). Dovremmo inserire nel dominio tutte le costanti utilizzate (in questo caso la sola a) e definire P e Q in modo tale che siano soddisfatte le formule presenti nel nodo in esame. Potremmo allora definire $D = \{a\}$ e $|P| = \{a\}$, $|Q| = \{a\}$, in quanto soddisfano le formule $\forall x P(x)$, $P(a)$ e $Q(a)$.