Terza Esercitazione di Metodi matematici per l'informatica (Canale A-D)

Francesco Davì

17 ottobre 2008

Strumenti per l'esercitazione

- Dato un insieme I:
  - La relazione $R \subseteq I \times I$ gode della proprietà *asimmetrica* se, per ogni $a, b \in I$, $(a, b) \in R$ allora $(b, a) \notin R$.
  - Una relazione $R \subseteq I \times I$ si dice *relazione d'ordine* (o di ordine largo) se gode delle proprietà riflessiva, antisimmetrica e transitiva.
  - Una relazione $R \subseteq I \times I$ si dice *relazione d'ordine stretto* se gode delle proprietà antiriflessiva e transitiva.
- Una relazione $R \subseteq D \times C$ si dice *funzione* (o *applicazione*) se per ogni $a \in D$ esiste uno ed un solo $b \in C$ tale che $(a, b) \in R$.
- Data la funzione $f : D \to C$, l'insieme $Im(D) \subseteq C$ costituito dalle immagini degli elementi di D si dice *insieme delle immagini* (o *immagine*) di f.
- La funzione $f : D \to C$ si dice *iniettiva* se per ogni $x_1 \in D$ e $x_2 \in D$, con $x_1 \neq x_2$, si ha che $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- La funzione $f : D \to C$ si dice *suriettiva* se per ogni $b \in C$ esiste (almeno) un $x \in D$ tale che$f(x) = b$.
- La funzione $f : D \to C$ si dice *biiettiva* (o *biiezione* o *corrispondenza biunivoca*) se è contemporaneamente iniettiva e suriettiva.

- Date le funzioni $f : A \to B$ e $g : B \to C$, si dice *funzione composta* la funzione $g \circ f$ (a volte scritta semplicemente gf) che ad ogni elemento $a \in A$ fa corrispondere l'elemento $g(f(a)) \in C$.
- Dato un insieme A, si dice *identità su A* e si indica con i_A (o semplicemente con i, quando A è chiaro dal contesto) la relazione di $A \times A$ che ad ogni elemento $a \in A$ associa se stesso, cioè $i_A = \{(a, a) : a \in A\}$.
- Una funzione si dice *invertibile* quando anche la sua relazione inversa rispetta la definizione di funzione.
- Una funzione è invertibile se e soltanto se è biiettiva.

Esercizi

Esercizio *. Si elenchino tutte le proprietà di cui godono le relazioni $\subseteq$ e $\subset$ e si dica se sono relazioni di equivalenza o relazioni d'ordine (largo o stretto, parziale o totale).

Esercizio 34. Si consideri l'insieme $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_0$, cioè l'insieme di coppie ordinate dei numeri interi, la cui seconda componente non sia nulla. Sia $\simeq$ la relazione su $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_0$ definita nel modo seguente: (a, b) è in relazione a (c, d) (scritto $(a, b) \simeq (c, d)$) se e solo se $ad = bc$. Dimostrare che $\simeq$ è una relazione di equivalenza.

Esercizio 46. Similmente agli Esercizi 34 e 35, si definisca una relazione $\simeq \subseteq (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ tale che $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/_{\simeq}$ possa essere usata per definire i numeri interi $\mathbb{Z}$.

Esercizio 52. Siano $A = [-3, 3]$, $B = [0, 9]$ e $C = [-27, 27]$; siano inoltre $f_1 : A \to \mathbb{R}$, $f_2 : A \to B$ e $f_3 : A \to C$ definite dalla legge: "associa a ciascun numero il suo quadrato". Quale delle funzioni date è suriettiva? Come cambierebbero le risposte se le funzioni associassero ad ogni numero il loro cubo?

Esercizio 55. Siano $f(x) = k + 5 + x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$, dove $\sqrt{x}$ è la funzione che restituisce la radice quadrata del numero x. Per quali valori di k sia $g \circ f$ e $f \circ g$ sono entrambe definite?

Esercizio 61. Siano $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ e $B = \{b_1, \dots, b_n\}$; sia inoltre f una funzione da A a B. Si dimostri che:
(i) se f è iniettiva, allora $m \leq n$;
(ii) se f è suriettiva, allora $m \geq n$;
(iii) se f è biiettiva, allora $m = n$.

Esercizio 62. Siano $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ e $B = \{b_1, \dots, b_m\}$; allora esiste una funzione biiettiva da A a B.

Esercizio 65. Si dimostri che una funzione $f : A \to B$ è biiettiva se e soltanto se esiste una funzione $g : B \to A$ tale che $g \circ f = i_A$ e $f \circ g = i_B$.