Soluzioni della Quinta Esercitazione di Metodi matematici per l'informatica (Canale A-D)

Francesco Davì

21 novembre 2008

Soluzioni degli esercizi preparatori per il primo esonero

1.

- *L'affermazione (a) è falsa dato che* $B \setminus A = \{\{1\}, a\}$ *e* $\wp(B \setminus A) = \{\emptyset, \{\{1\}\}, \{a\}, \{\{1\}, a\}\}$ *e quindi* $\{\emptyset\} \notin \wp(B \setminus A)$ *(*$\{\emptyset\}$ *non è un elemento di* $\wp(B \setminus A)$*);*

- *l'affermazione (b) è falsa dato che* $A \cap B = \{1\}$ *e quindi* $(A \cap B) \not\subset (B \setminus A)$ *(*$(B \setminus A)$ *non contiene l'elemento 1);*

- *l'affermazione (c) è falsa dato che* $\{\emptyset, \{1\}\} \not\subset \wp(B \setminus A)$ *(*$\{1\}$ *non è un elemento di* $\wp(B \setminus A)$*).*

2.

- *L'affermazione (a) è vera, eliminando elementi da un insieme vuoto si ottiene sempre un insieme vuoto;*

- *l'affermazione (b) è falsa, se* $A = B$ *otteniamo che* $B \setminus A = \emptyset$*;*

- *l'affermazione (c) è falsa, se* $A \neq \emptyset$ *otteniamo che* $A \setminus B \neq \emptyset$*.*

3.

- *R non è una relazione di equivalenza, in quanto non gode delle proprietà riflessiva (non ci sono gli elementi $(1,1),(2,2)$ e $(3,3)$), simmetrica (non c'è l'elemento $(1,3)$) e transitiva (non ci sono gli elementi $(1,1),(1,3),(2,2)$ e $(3,3)$);*

- $\underline{R} = \{(1,2),(2,3),(2,1),(3,2),(3,1),(1,1),(1,3),(2,2),(3,3)\}$ *è una relazione di equivalenza, in quanto gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva;*

- $\underline{R} \setminus \Delta_A = \{(1,2),(2,3),(2,1),(3,2),(3,1),(1,3)\}$ *non è una relazione di equivalenza, in quanto non gode delle proprietà riflessiva e transitiva (non ci sono gli elementi $(1,1),(2,2)$ e $(3,3)$).*

4.

- $R^{-1} = \{(1,2),(2,3),(2,1),(3,2),(1,3)\}$;

- $\underline{R}^{-1} = \{(1,2),(2,3),(2,1),(3,2),(3,1),(1,1),(1,3),(2,2),(3,3)\} = \underline{R}$;

- $(\underline{R} \setminus \Delta_A)^{-1} = \{(1,2),(2,3),(2,1),(3,2),(3,1),(1,3)\} = \underline{R} \setminus \Delta_A$.

5.

- *L'affermazione (a) è vera. Infatti se supponiamo per assurdo che $f \circ g$ non sia iniettiva, allora esisteranno due elementi x, y del dominio di $f \circ g$ tali che $(f \circ g)(x) = (f \circ g)(y)$. Dato che f e g sono totali, il dominio di $f \circ g$ coincide con quello di g e il codominio di $f \circ g$ coincide con quello di f, quindi dovremmo avere che esistono due elementi distinti del dominio di g tali che loro immagini coincidono oppure che esistono due elementi distinti del dominio di f tali che loro immagini coincidono ma entrambi i casi contraddicono l'ipotesi che f e g sono iniettive. Quindi l'ipotesi per assurdo non vale: $f \circ g$ è iniettiva;*

- *l'affermazione (b) è vera. Infatti se supponiamo per assurdo che $g \circ f$ non sia suriettiva, allora esisterà un elemento z del codominio di $g \circ f$ tale che per nessun elemento x del dominio di $g \circ f$ vale $(g \circ f)(x) = z$. Dato che f e g sono totali, il dominio di $g \circ f$ coincide con quello di f e il* *codominio di $g \circ f$ coincide con quello di g, quindi dovremmo avere che esiste un elemento nel codominio di g che non ha controimmagini nel dominio di g (ma questo contraddice il fatto che g è suriettiva) oppure che esiste un elemento nel codominio di f (che coincide con il dominio di g) che non ha controimmagini nel dominio di f (ma questo contraddice il fatto che f è suriettiva). Quindi l'ipotesi per assurdo non vale: $g \circ f$ è suriettiva;*

6. *Applichiamo l'induzione su n.*
Caso base: *se $n = 2$ otteniamo che la relazione in esame è vera, infatti $\prod_{k=2}^{2}(1 - \frac{1}{k}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ e $\frac{1}{n} = \frac{1}{2}$. (Quindi il minimo caso ammissibile è $n = 2$, non ha senso verificare la relazione per $n = 0$ o $n = 1$ dato che l'indice k della produttoria inizia con il valore 2).*
Ipotesi induttiva: *Supponiamo che $\prod_{k=2}^{n}(1 - \frac{1}{k}) = \frac{1}{n}$ è soddisfatta per un qualsiasi valore n.*
Passo induttivo: *Vogliamo dimostrare che la relazione vale anche per $n+1$, cioè vogliamo dimostrare che vale $\prod_{k=2}^{n+1}(1 - \frac{1}{k}) = \frac{1}{n+1}$.*
Possiamo notare che la produttoria in esame può essere "spezzata" in due blocchi, la sommatoria dei primi n valori e l'ultimo valore (quello di indice $n + 1$):

$$\prod_{k=2}^{n+1}(1 - \frac{1}{k}) = \prod_{k=2}^{n}(1 - \frac{1}{k}) \cdot (1 - \frac{1}{n+1}).$$

Ora possiamo applicare l'ipotesi induttiva

$$\prod_{k=2}^{n+1}(1 - \frac{1}{k}) = \underline{\prod_{k=2}^{n}(1 - \frac{1}{k})} \cdot (1 - \frac{1}{n+1}) = \frac{1}{\underline{n}} \cdot (1 - \frac{1}{n+1})$$

e svolgendo i calcoli otteniamo quanto voluto, dato che

$$\frac{1}{n} \cdot (1 - \frac{1}{n+1}) = \frac{1}{n} \cdot \frac{(n+1)-1}{n+1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$