Soluzioni della Prima Esercitazione di Metodi matematici per l'informatica (Canale A-D)

Francesco Davì

3 ottobre 2008

Soluzioni degli esercizi

Soluzione Esercizio 12. *L'insieme A contiene esattamente tre elementi: l'elemento 2, l'elemento 4 e l'insieme che contiene l'elemento 4 e l'elemento 5. Quindi*
(a) $\{4,5\} \subset A$ è sbagliata in quanto l'insieme A non contiene l'elemento 5;
(b) $\{4,5\} \in A$ è giusta in quanto l'insieme A contiene l'insieme che contiene l'elemento 4 e l'elemento 5;
(c) $\{\{4,5\}\} \subset A$ è giusta per lo stesso motivo del punto (b);
(d) $5 \in A$ è sbagliata perché l'insieme A non contiene l'elemento 5;
(e) $\{5\} \in A$ è sbagliata perché l'insieme A non contiene l'insieme che contiene l'elemento 5;
(f) $\{5\} \subset A$ è sbagliata per lo stesso motivo del punto (d).

Soluzione Esercizio 13. *L'insieme B contiene esattamente due elementi: l'elemento 1 e l'elemento 0. Quindi*
(a) $\{0\} \in B$ è sbagliata in quanto l'insieme B non contiene l'insieme che contiene l'elemento 0;
(b) $\emptyset \in B$ è sbagliata perché l'insieme B non contiene l'insieme vuoto (per essere giusta, l'insieme B sarebbe dovuto essere uguale a $\{1,0,\emptyset\}$ che è diverso da $\{1,0\}$);
(c) $\{0\} \subset B$ è giusta dato che l'insieme B contiene l'elemento 0;
(d) $0 \in B$ è giusta per lo stesso motivo del punto (c);
(e) $0 \subset B$ è sbagliata dato che non ha senso chiedersi se un elemento è sottoinsieme di un insieme (invece ha senso chiedersi se un insieme è sot-

toinsieme di un altro).

Soluzione Esercizio 5. *Vedi il libro di testo, pag.9*

Soluzione Esercizio 8. *Vedi il libro di testo, pag.10*

Soluzione Esercizio 11. *Vedi il libro di testo, pag.11*

Soluzione Esercizio 17. *Vogliamo dimostrare che* $A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C$ *e che* $(A \cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C)$ *(tecnica della doppia inclusione, in questo modo dimostriamo che tutti gli elementi del primo insieme appartengono anche al secondo e viceversa, quindi i due insiemi sono uguali, dato che contengono esattamente gli stessi elementi).*
Per verificare che $A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C$ *consideriamo un generico elemento* x *appartenente all'insieme* $A \cap (B \cap C)$ *e dimostriamo che* x *appartiene anche all'insieme* $(A \cap B) \cap C$. *Se* $x \in A \cap (B \cap C)$ *allora* $x \in A$ *e* $x \in B \cap C$, *quindi* $x \in A$ *e* $x \in B$ *e* $x \in C$, *da cui segue che* $x \in A \cap B$ *e* $x \in C$, *cioè* $x \in (A \cap B) \cap C$.
L'inclusione opposta è simmetrica.

Soluzione Esercizio 21. *Vogliamo dimostrare che* $A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$ *e che* $(A \times B) \cup (A \times C) \subseteq A \times (B \cup C)$.
Per verificare la prima inclusione mostriamo che ogni elemento del primo insieme appartiene anche al secondo. Se $z \in A \times (B \cup C)$ *allora* $z = (x, y)$ *dove* $x \in A$ *e* $y \in B \cup C$, *cioè* $x \in A$ *e* $y \in B$ *oppure* $x \in A$ *e* $y \in C$. *Quindi* z *sarà della forma* (a, b) *dove* $a \in A$ *e* $b \in B$ *(cioè* $(a, b) \in A \times B$*) oppure sarà della forma* (a, c) *dove* $a \in A$ *e* $c \in C$ *(cioè* $(a, c) \in A \times C$*). Allora* $z \in A \times B$ *o* $z \in A \times C$, *da cui segue che* $z \in (A \times B) \cup (A \times C)$.
L'inclusione opposta è simmetrica.

Soluzione Esercizio 1 del primo esonero dell'anno accademico 2006/07 (compito fila A):
1. *L'insieme* C *è l'insieme delle parti dell'insieme* $A = \{a, b, c\}$, *quindi* $C = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.
A. $A \cap C = \emptyset$ *è vero, in quanto non esiste alcun elemento che appartiene contemporaneamente all'insieme* A *e all'insieme* C.
(Attenzione: l'intersezione tra un qualsiasi insieme e l'insieme delle sue par-

ti non è sempre uguale all'insieme vuoto. Verificate ad esempio cosa accade nel caso in cui l'insieme in esame contenga l'insieme vuoto);
B. $A \in C \setminus B$ *è vero in quanto* $C \setminus B = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$*;*
C. $B \setminus C = \emptyset$ *è falso dato che* $B \setminus C = \{a\}$*;*
D. $b \in B \cap C$ *è falso in quanto* $B \cap C = \{\{b\}, \{b,c\}\}$;
(Attenzione: è sufficiente verificare che l'elemento b *non appartiene ad almeno un insieme tra* B *e* C *per dedurre che* $b \notin B \cap C$*, senza dover calcolare esplicitamente* $B \cap C$*);*
E. $a \in B \cup C$ *è vero, infatti* $B \cup C = \{\emptyset, a, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$.
(Attenzione: è sufficiente verificare che un elemento appartiene ad almeno un insieme tra B *e* C *per dedurre che* $a \in B \cup C$*, senza dover calcolare esplicitamente* $B \cup C$*);*
F. $B \setminus C \in C$ *è vero dato che* $B \setminus C = \{a\}$ *e che* $\{a\} \in C$.