Quarta Esercitazione di Metodi matematici per l'informatica (Canale A-D)

Francesco Davì

12 novembre 2008

Strumenti per l'esercitazione

- Per dimostrare per **induzione** che una proposizione è soddisfatta per tutti gli elementi di un fissato insieme (ad esempio i numeri naturali) si opera come segue:

  - **Caso base**: si verifica direttamente la verità della proprietà per il più piccolo elemento dell'insieme;
  - **Ipotesi induttiva**: si ammette la verità della proposizione per un fissato elemento n;
  - **Passo induttivo**: si dimostra la validità della proposizione per l'elemento $n+1$ (sfruttando l'ipotesi induttiva).

  Una generalizzazione del principio di induzione è il principio di **induzione completa**, per il quale l'ipotesi induttiva ammette la verità della proposizione in esame per ogni elemento minore di un fissato n. Quando affrontate un esercizio, utilizzate il principio di induzione completa solo se è necessario (se avete cioè bisogno di supporre valida la proposizione per i valori minori di un fissato n, anziché per il solo valore n, per dimostrare il passo induttivo).

- Il fattoriale di un numero intero k si scrive $k!$ ed è uguale al prodotto di tutti gli interi da 1 fino a k:

$$k! = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 1.$$

Possiamo inoltre notare che

$$k! = k \cdot (k-1)!$$

Esercizi

Esercizio 98. Dimostrare che $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

Esercizio 100. Si dimostri per induzione che $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$; qual è il minimo caso base ammissibile?

Esercizio 101. Sia $a \neq 1$; provare per induzione che, per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, si ha che $\sum_{i=1}^{n} a^i = a\frac{1-a^n}{1-a}$.

Esercizio 103. Siano x e y due naturali distinti e non nulli; si dimostri per induzione che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $x - y$ divide $x^n - y^n$.

Esercizio 105. Dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $5^n + 2 \cdot 3^{(n-1)} + 1$ è divisibile per 8.

Esercizio *. Dimostrare per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale

$$\sum_{k=0}^{n} (k \cdot k!) = (n+1)! - 1.$$

Esercizio 6 del primo esonero dell'anno accademico 2006/07 (compito fila A):
6. Si dimostri per induzione che $2^n + 3^n + 5^n \leq 10^n$, selezionando come caso base il minimo $n \in \mathbb{N}$ che soddisfa questa proprietà.

Esercizio 6 del primo esonero dell'anno accademico 2006/07 (compito fila B):
6. Sia $\mathbf{L}$ l'insieme delle successioni finite (parole) di simboli presi dall'insieme $A = \{0, 1\}$, così definito:

- la parola vuota $\epsilon \in \mathbf{L}$;

- se $w \in \mathbf{L}$ allora $0w1 \in \mathbf{L}$.

Si dimostri per induzione che le parole in $\mathbf{L}$ hanno tutte lunghezza pari, diciamo $2n$, ed i primi n simboli sono tutti 0 e gli altri tutti 1.